Regional Hydrological Impacts of Climatic Change—Hydroclimatic Variability
(Proceedings of symposium S6 held during the Seventh IAHS Scientific Assembly at Foz do Iguaçu, Brazil, April 2005). IAHS Publ. 296, 2005.

Modèle de transformation pluie–débit basé sur le Principe de Moindre Action

A. AFOUDA[1], E. A. LAWIN[1], T. LEBEL[2], C. PEUGEOT[2] & L. SEGUIS[2]

1 *Université d'Abomey-Calavi, Département de Math, Laboratoire de Modélisation et d'Hydrodynamique Appliquée (LAMHYA), BP 526 Cotonou, Bénin*
afoudab@netcourrier.com or ewaari@yahoo.fr

2 *LTHE/IRD, 1025 BP 53, Domaine Universitaire, F-38041 Grenoble Cedex 09, France*

Résumé L'une des questions actuelles qui se posent aux hydrologues est de caractériser l'impact de la variabilité climatique sur les ressources en eau et d'évaluer la disponibilité de ces ressources pour l'agriculture dans les régions les plus vulnérables, à partir des modèles de transformation pluie–débit. Or s'il existe actuellement un grand nombre de modèles hydrologiques conceptuels ou empiriques globaux, le nombre élevé de paramètres libres, combiné au manque ou à l'insuffisance de données de mesures sur le terrain, rendent leurs prédictions incertaines. Les modèles physiques basés sur les lois de conservation sont encore plus exigeants en qualité et quantité de données. Dans cette étude, un modèle basé sur le Principe de Moindre Action est proposé. Sa formulation nécessite peu de paramètres. Sa mise en œuvre dans le cadre de l'étude du tarissement sur le bassin de l'Ouémé (au Bénin), montre que le modèle proposé peut servir de base pour l'élaboration des stratégies de gestion intégrée des ressources en eau.

Mots clefs variabilité climatique; principe de moindre action; modèle pluie–débit; paramètre d'échelle

A rainfall–runoff model based on the Least Action Principle

Abstract One of the main problems faced by hydrologists is to characterize the impacts of climate change and variability on water resources availability and agricultural productivity. This is particularly crucial in West Africa, where the sensitivity of water resources to climate fluctuations was dramatically illustrated by the drought that struck the region for several decades. In most of existing conceptual and empirical rainfall–runoff models the use of *ad hoc* parameters and the lack of appropriate field data are the main causes of uncertainties in hydrological information. The physics-based models, derived from conservation laws considerations are in turn, more demanding in data quality and quantity whereas such data are not, as yet, available within the region. It is therefore of paramount importance to develop new tools that can permit optimal representation of hydrological interactions for water resources planning and management activities. The newly introduced Rodriguez-Iturbe's "Principle of Minimum Energy Expenditure" is generalized using the Least Action Principle. The implementation of this theory using Ouémé River data (in Benin) shows that the model can offer some degree of remedy to the problem of inadequate hydrologic information, in the particular context of ungauged basin.

Key words climate variability; least action principle; rainfall–runoff model; scale parameter

INTRODUCTION

Les cours d'eau naturels sont des systèmes qui présentent un haut niveau d'organisation spatiale. Cette observation a conduit plusieurs auteurs à l'idée que les chenaux de ces cours d'eau présentent une distribution relativement stable. Plusieurs hypothèses sont alors avancées pour tenter d'expliquer cette stabilité, telles que: la production minimum d'entropie (Leopold & Langbein, 1962; Langbein, 1964), le nombre de Froude minimum (Yalin & Silva, 1999, 2000), le critère de perte de charge optimal (Davies & Sutherland, 1980), le taux minimum de dissipation d'énergie (Yang, 1987; Yang & Song, 1979; Howard, 1990). Chacune de ces hypothèses est supposée représenter un principe général permettant une description optimale du comportement du système fluvial. Mais si dans certains cas, elles permettent de faire des prédictions acceptables, leur utilisation a conduit à beaucoup de critiques par manque de justifications physiques convaincantes (Huang *et al.*, 2002). Dans une étude approfondie des cours d'eau, Rodriguez-Iturbe et ses collaborateurs (Rodriguez-Iturbe *et al.*, 1992; Rodriguez-Iturbe & Rinaldo, 1997), ont montré qu'une rivière s'ajuste vers un état d'équilibre dans lequel la dissipation de l'énergie est minimum. Dans ce contexte, la production de l'écoulement est associée au taux de distribution de la dépense en énergie. Cette idée repose sur des faits d'observation suivant lesquels les systèmes fluviaux répondent à des sollicitations de forces variables dans l'espace et dans le temps en ajustant les distributions de leurs affluents, la configuration de leurs lits, la pente et la forme de leurs sections, (Eagleson, 1970). La nouveauté introduite par Rodriguez-Iturbe est que ces observations sont synthétisées sous la forme de trois principes de base qui expliquent le fonctionnement dynamique des cours d'eau en termes de dépense minimum en énergie.

Mais malgré les nombreux travaux qui lui sont consacrés, (Rinaldo *et al.*, 1993; Maritan *et al.*, 1996; Rigon *et al.*, 1996), le principe de dépense minimum en énergie n'est pas rattaché à un principe physique universellement accepté. Face aux fluctuations climatiques observées au cours de ces trente dernières années en Afrique de l'Ouest, un approfondissement de la compréhension du fonctionnement des cours d'eau, sur une base physique, est nécessaire pour permettre de mieux caractériser l'impact de cette variabilité climatique sur les ressources en eau et l'agriculture. De nombreux modèles existent pour décrire la transformation de la pluie en débit. Mais les modèles conceptuels exigent un nombre élevé de paramètres libres dont le sens physique n'est souvent pas évident, tandis que les modèles physiques basés sur les lois de conservation sont exigeants en quantité et qualité de données qui ne sont pas encore disponibles dans cette région. Le principe de dépense minimum en énergie, proposé par Rodriguez-Iturbe offre une alternative basée sur un principe d'optimalité. Une généralisation de ce principe, prenant en compte la stabilité des propriétés géomorphologiques du bassin versant a été proposée récemment sous la forme du Principe de Moindre Action (PMA), universellement connu en physique (Afouda *et al.*, 2004). Le modèle de transformation pluie–débit qui en découle est utilisé ici pour l'étude des débits d'étiage du bassin de l'Ouémé (Bénin). On procède dans un premier temps, à la présentation théorique des critères d'optimalité des bassins versants et à la description de leur dynamique par le Principe de Moindre Action. Ensuite, on présente des solutions théoriques du modèle. Enfin, la dernière phase de ce travail est consacrée à l'application de cette théorie à l'étude du tarissement dans le bassin de l'Ouémé.

BASSINS VERSANTS OPTIMAUX ET PRINCIPE DE MOINDRE ACTION

Les bassins versants optimaux

Le concept de bassin versant optimal repose sur les travaux antérieurs (Horton, 1945; Hack, 1957; Leopold & Langbein, 1962; Howard, 1990). En particulier Hack a montré que pour un bassin versant naturel, l'aire drainée et la longueur du plus long drain sont reliées entre elles par la relation suivante qui porte son nom:

$$l = aS^h \tag{1}$$

Dans le travail original de Hack, a = 1.4 est un coefficient numérique et h = 0.6 est un facteur d'échelle. Cette relation avait d'abord attiré l'attention de Mandelbrot (1983) qui en a proposé une interprétation fractale en introduisant pour décrire le bassin versant, une dimension fractale $D = 2 \times 0.6 = 1.2$. Ijjasz-Vasquez *et al.* (1993) ont proposé une autre interprétation à partir de l'analyse du concept de dépense minimum en énergie. La relation de Hack est alors considérée comme le résultat d'une compétition entre les actions de drainage et les actions qui tendent à minimiser l'énergie dissipée par le bassin versant. Mais comme la loi de Hack ne spécifie pas la forme du bassin versant, toute étude analytique nécessite l'introduction d'un rectangle équivalent de longueur L_1 et de largeur L_2. Dans ce contexte:

$$S \sim L_1 L_2 \quad \text{et} \quad l \sim L_1^d \tag{2}$$

où d est un coefficient numérique avec $1.0 < d < 1.1$. Tous les autres paramètres d'échelle du bassin versant dépendent de la paire (h, d) qui de ce fait, caractérise la classe d'universalité du bassin versant. D'après Dodds & Rothman (2001), un bassin versant est optimal si [(h, d) = (1/2,1), (3/5,1), (2/3,1)]. Les bassins versants optimaux possèdent la propriété caractéristique de minimiser le taux de dissipation de l'énergie. D'après Rodriguez-Iturbe & Rinaldo (1997), et Rodriguez-Iturbe *et al.* (1992), ce taux de dépense minimum d'énergie est estimé par:

$$E = C\sum_{i=1}^{n} Q_i^{\frac{1}{2}} L_i \tag{3}$$

où L_i est la longueur du bief de rivière, Q_i le débit correspondant et C un coefficient. L'équation (3) indique que dans un bassin versant naturel, la production de l'écoulement correspondant à un débit Q_i dans un bief (i), choisira toujours parmi toutes les alternatives possibles, celle qui minimise l'énergie de son action. Une généralisation naturelle de cette formulation consiste à considérer le principe physique qui minimise l'action. Ce Principe de Moindre Action (PMA), universellement utilisé en physique, est adapté ici à la modélisation pluie–débit.

Principe de Moindre Action

Le Principe de Moindre Action (PMA), originellement formulé par Maupertuis au 18ème siècle et généralisé au 20ème siècle par le théorème de Noether (Arnold, 1974; Doubrovine *et al.*, 1979) indique que parmi toutes les alternatives possibles, un système naturel choisit toujours celle qui minimise l'action. La formulation analytique de cette idée est décrite par l'équation d'Euler-Lagrange correspondant à la condition que l'équation suivante soit minimum:

$$\wedge[Q] = \int_{\Omega} \mathrm{d}X L(X, Q, Q_X) \tag{4}$$

Dans cette relation, $L(X,Q,Q_X)$ est appelé le Lagrangien, Q est le débit, $Q_X = \partial Q/\partial X$, et X décrit les coordonnées d'espace et de temps. Le principe de moindre action implique donc:

$$\delta \wedge[Q] = \int_{\Omega} \mathrm{d}X \left[\frac{\partial L}{\partial Q} - \frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial L}{\partial Q_X} \right) \right] \delta Q + \frac{\partial L}{\partial Q_X} \delta Q \,|_{\Sigma} = 0 \tag{5}$$

Dans cette équation, on suppose généralement que $\delta Q = 0$ aux frontières $\sum$, de sorte que le terme $\frac{\partial L}{\partial Q_X} \delta Q \,|_{\Sigma} = 0$. Par ailleurs, δQ est arbitraire en dehors de la frontière de sorte que l'équation (5) implique:

$$\frac{\partial L}{\partial Q} - \frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial L}{\partial Q_X} \right) = 0 \tag{6}$$

L'équation (6) est appelée équation d'Euler-Lagrange. D'après Rodriguez-Iturbe & Rinaldo (1997), le taux de dépense d'énergie est une fonction de Q variant dans l'espace et dans le temps. Il en résulte que la valeur de Q en un point donné peut être considérée comme une description généralisée de la position de ce point sur le bassin versant. Le Lagrangien est alors considéré comme la différence entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle exprimée en terme de position et de vitesse généralisées dans l'espace et dans le temps.

Dans la pratique hydrologique, les débits de crue sont habituellement liés aux surfaces du bassin. Une crue de probabilité au dépassement P a été décrite (Gupta *et al.*, 1994) par la relation:

$$Q_P = A_P S^{b(P)} \tag{7}$$

où S est l'aire de drainage en un point donné du réseau, $b(P)$ un exposant d'échelle dépendant de la probabilité P. A_p est un coefficient qui dépend du bassin et aussi de P. Dans le cas de dépendance simple $b(P) = b$ est indépendante de la probabilité d'occurrence (Gupta & Dawdy, 1994). Pour les bassins versants optimaux et pour une pluie uniforme, Rodriguez-Iturbe & Rinaldo (1997) ont indiqué que $Q \sim S$. Mais cette hypothèse simplificatrice n'est pas retenue ici. On suppose une pluie variant dans l'espace et le temps et décrite par:

$$R = R(X) \qquad X = X(x, t) \qquad \text{et} \quad x = x_i \quad i = 1, 2 \tag{8}$$

Le débit est alors défini à partir de l'hypothèse qu'il est relié aux différentes caractéristiques physiques et climatologiques du bassin versant par la relation non-linéaire:

$$Q = AS^{a_1}\, l^{a_2}\, I^{a_3}\, R^{\beta} \tag{9}$$

où S, l, et I décrivent respectivement la surface du bassin, la longueur du drain le plus long, et la pente moyenne; et A est un coefficient qui dépend des conditions de saturation initiale du sol, tandis que (a_i,β) sont des exposants d'échelle.

On considère maintenant le Lagrangien décrivant la somme algébrique de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle en terme de coordonnées et de vitesse généralisées sous la forme:

$$L = -\frac{1}{2}\left[Q^{2\nu} + \left(\frac{\partial Q}{\partial X}\right)^2\right] \tag{10}$$

où $\partial Q/\partial X$ décrit la variation spatio-temporelle de Q et ν est un paramètre de non linéarité. Dans ce cas, on détermine:

$$\frac{\partial L}{\partial Q} = \nu Q^{2\nu-1} \qquad \frac{\partial L}{\partial Q_X} = -\frac{\partial Q}{\partial X} \tag{11}$$

L'équation d'évolution du débit se met alors sous la forme générale suivante:

$$\frac{\partial}{\partial X}\left[\frac{\partial Q}{\partial X}\right] = \nu Q^{2\nu-1} \tag{12}$$

DISCUSSION DE LA SOLUTION THEORIQUE

Comme la plupart des modèles hydrologiques sont à variation temporelle, on considère dans cette discussion la forme temporelle de l'équation d'évolution. On a alors:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\right] = \nu Q^{2\nu-1} \tag{13}$$

En utilisant l'équation (9) et en considérant $R = R(t)$ comme fonction de la seule variable temps, on obtient le système d'équations suivant:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}Z(R,t)}{\mathrm{d}t} = \eta(R,t) & \text{(14a)} \\ \dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\nu}{\lambda} Q^{2\nu-1} = \eta(R,t) & \text{(14b)} \end{cases}$$

où $\lambda = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\log K)$ et $K = Q = AS^{a_1}\, l^{a_2}\, I^{a_3}$. En clair λ décrit les propriétés géomorphologiques du bassin versant. $Z = \dfrac{K}{\lambda}\dfrac{\mathrm{d}R^{\beta}}{\mathrm{d}t}$ et $\eta(R,t)$ est une description de la pluie efficace. L'équation (14a) décrit la transformation de la pluie sur le bassin versant tandis que l'équation (14b) décrit la dynamique du débit à l'exutoire. Ces différentes étapes sont introduites de manière *ad'hoc* dans les modèles conceptuels. Lorsque l'on considère une longue période sans pluie, les équations (14) se réduisent à:

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}+\frac{\nu}{\lambda}Q^{2\nu-1}=0 \tag{15}$$

Pour $\nu = 1$, cette équation décrit le tarissement dans le cas idéal d'un comportement linéaire du bassin versant. L'équation (15) indique que dans la plupart des situations des bassins versants naturels, le tarissement peut se faire suivant une relation non-linéaire comme l'indique l'équation de Boussinesq (Eng & Brutsaert, 1999). La solution analytique de l'équation (15) montre que le débit à l'exutoire du bassin dépend de deux paramètres ν et λ qui dépendent des caractéristiques géomorphologiques de ce bassin.

APPLICATION A L'ETUDE DU TARISSEMENT

Localisation et données de l'étude

Le bassin versant de l'Ouémé (Fig. 1) s'étend sur une superficie totale de 48 860 km^2 à la station de Bonou. Chacun des vingt trois sous-bassins qui le constituent est instrumenté à son exutoire, d'une station hydrométrique. Les données issues de ces stations sont organisées dans une Base de Données Hydrométriques du Bénin (BDHB) gérée par la Direction de l'Hydraulique et le projet CATCH (Couplage de l'Atmosphère Tropicale et du Cycle Hydrologique). Les débits journaliers utilisés proviennent de cette base. Les données relatives aux caractéristiques géométriques des différents sous-bassins utilisés pour cette étude proviennent du logiciel DEMIURGE version 3.1: production et traitement de modèles numériques de terrains appliqués à l'hydrologie, et élaboré par l'équipe IRD-Bénin.

Analyse du tarissement

En considérant le cas simple de l'équation (15) avec $\nu = 1$, l'évolution du débit est décrite par la loi de Maillet qui s'écrit dans ce contexte $Q(t) = Q_0 \exp[-\alpha(t - t_0)]$ où

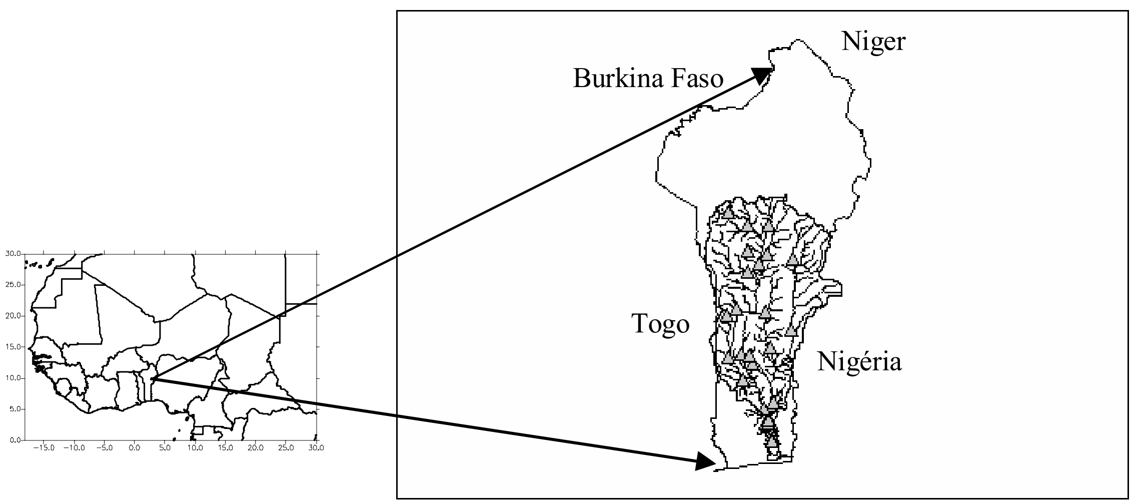

Fig. 1 Localisation et données de l'étude.

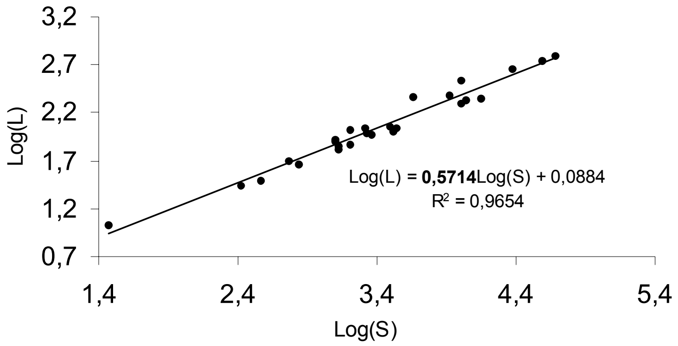

Fig. 2 Relation entre aires et longueurs des rectangles équivalents des sous-bassins.

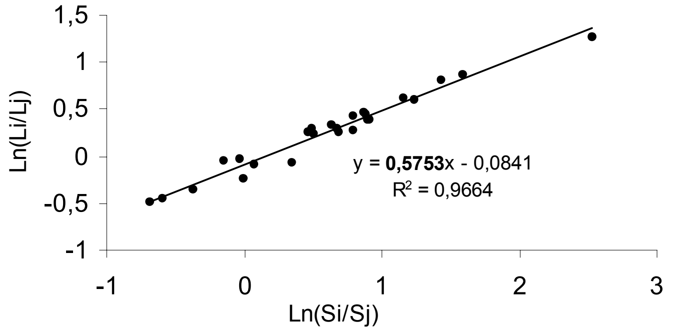

Fig. 3 Relation entre les longueurs des rectangles équivalents et des surfaces des sous-bassins: cas du sous-bassin de l'Ouémé à Bétérou.

Tableau 1 Valeurs de *h* pour différents sous-bassins de l'Ouémé.

Sous-bassins	Superficie *S* (km²)	Valeur de *h*	R^2
Aguima	30	0.5921	0.9572
Wéwé	262	0.5679	0.9623
Aguimo	367	0.5668	0.9636
Donga-pont	593	0.5723	0.9653
Tébou	694	0.5692	0.9646
Affon	1250	0.5728	0.9658
Savalou	1282	0.5722	0.9654
Donga-Affon	1320	0.5707	0.9652
Sarmanga	1351	0.5700	0.9658
Alpouro	1635	0.5704	0.9659
Banon	1636	0.5731	0.9678
Vossa	2068	0.5718	0.9658
Yérou-Maro	2153	0.5714	0.9653
Igbomakoro	2335	0.5712	0.9659
Côte238	3138	0.5716	0.9656
Atchérigbé	4533	0.5679	0.9724
Domè	8415	0.5691	0.9651
Bétérou	10052	0.5753	0.9664
Kaboua	10110	0.5639	0.9694
Ohhvo	14284	0.5792	0.9685
Savè	23640	0.5661	0.9631
Zangnanado	39000	0.5677	0.961
Bonou	48860	0.5695	0.9601

$\alpha = 1/\lambda$ désigne le coefficient de tarissement et t est le nombre de jours écoulés depuis l'observation du débit initial Q_0. Avant de procéder à l'analyse du tarissement, on a vérifié l'optimalité du bassin versant en déterminant pour chacun des sous-bassins de l'Ouémé, le facteur d'échelle h. Les résultats obtenus (Fig. 2 et Fig. 3; Tableau 1) mettent en évidence la valeur de ce paramètre (h voisin de 0.6), dans le cas spécifique du bassin versant de l'Ouémé. Ce résultat, conforme à celui de Hack (1957), et de Rodriguez-Iturbe *et al.* (1997), confirme les conditions d'optimalité du bassin en étude. Ainsi, en supposant la réponse du bassin linéaire, la loi de Maillet devrait permettre de retrouver le facteur d'échelle h lié au coefficient de tarissement par l'expression $\alpha = S^{2(h-1)}/b_s$ où b_s est une constante. A partir de la résolution numérique de l'évolution des débits, décrite par la loi de Maillet, les chroniques de coefficients de tarissement obtenus sur dix années (1984–1993) ont servi au calcul de coefficients moyens pour chacun des sept sous-bassins mis en gras dans le Tableau 1. Ces coefficients de tarissement moyens, mis en relation avec les surfaces des bassins correspondants (Fig. 4) ont permis de déterminer $b_s = -0.16$ et la valeur expérimentale de $h = 0.92$. On observe une nette différence entre les valeurs théorique et expérimentale de h. Ce qui permet de déduire que le tarissement ne peut être décrit dans cette région par une loi exponentielle décroissante à un paramètre. En considérant l'équation (15) sous forme discrète pour le cas non linéaire, on montre que le débit d'étiage est de la forme $Q_k \sim S^{\sigma(\nu\kappa)}$ avec $\sigma(\nu_\kappa) = h - 1/\nu_\kappa - 1$. Cette expression peut être utilisée par itération, pour les bassins non jaugés, lorsque la surface S et le paramètre d'échelle (h = 0.6) sont connus.

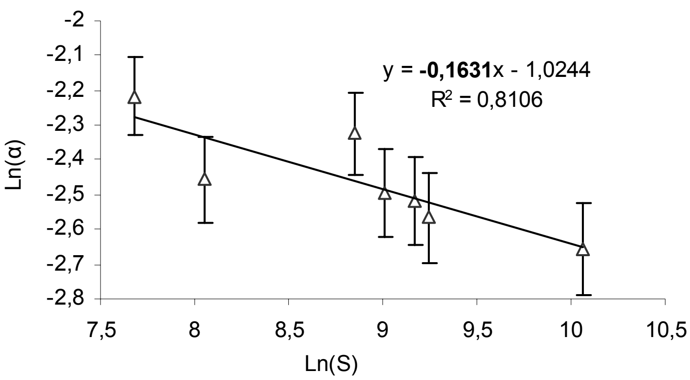

Fig. 4 Coefficient de tarissement—aire du bassin avec les barres d'erreur à 5%.

REFERENCES

Afouda, A., Lawin, A. E. & Lebel, T. (2004) A stochastic streamflow model based on minimum energy expenditure concept. In: *Contemporary Problems in Mathematical Physics* (ed. by J. Govaert, N. Hounkonnou & A. Msezane), 153–169. World Sci. Publ. Comp.

Arnold, V. (1974) *Les méthodes mathématiques de la mécanique classique.* Mir, Moscow, Russia.

Davies, T. R. H. & Sutherland, A. J. (1983) Extremal hypotheses for river behavior. *Water Resour. Res.* **19**, 141–148.

Dodds, P. S. & Rothman, D. H. (2001) Scaling, fluctuation and deviation. *Phys. Rev.* (submitted).

Doubrovine, B., Novikov, S. & Fomenko, A. (1979) *Géométrie contemporaine: méthodes et applications.* Mir edn, Moscow, Russia.

Eagleson, P. (1970) *Dynamic Hydrology.* McGraw Hill, New York, USA.

Eng, K. & Brutsaert, W. (1999) Generality of drought flow characteristics within the Arkanas river basin. *J. Geophys. Res.* **104**, 19436–19441.

Gupta, V. K. & Dawdy, D. R. (1994) Physical interpretations of regional variation in the scaling exponent of flood quantiles. *Hydrol. Processes* **9**, 347–361.

Gupta, V. K., Mesa, O. J. & Dawdy, D. R. (1994) Multiscaling theory of floods peaks. Regional quantiles analysis. *Water Resour. Res.* **30**, 3405–3421.

Hack, J. T. (1957) Studies of longitudinal stream profiles in Virginia and Maryland. *US Geol. Survey Prof. Paper 294-B,* 45–97.

Horton, R. E. (1945) Erosional development of stream and their drainage basins; hydrological approach to quantitative morphology. *Bull. Geol. Soc. Am.* **56**, 275–370.

Howard, A. D. (1990) Theoretical model of optimal drainage networks. *Water Resour. Res.* **26**, 2107–2117.

Huang, H. Q., Nanson, G. C. & Fagan, S. D. (2002) Hydraulic geometry of straight alluvial channels and the principle of least action. *J. Hydraul. Res.* **40**, 153–160.

Ijjasz-Vasquez, E. J., Bras, R. L., & Rodriguez-Iturbe, I. (1993) Hach's relation and optimal channel network; the elongation of a river basin as a consequence of energy minimization. *Geophys. Rev. Lett.* **20**, 1583–1586.

Langbein, W. B. (1964) Geometry of river channels. *J. Hydraul. Div. ASCE* **90**, 301–312.

Leopold, L. B. & Langbein, W. B. (1962) The concept of entropy in landscape evolution. *US Geol. Surv. Prof. Paper 500A*.

Maritan, A., Rinaldo, A., Giacometti, A., Rigon, R. & Rodriguez-Iturbe, I. (1996) Scaling law in river networks. *Phys. Rev. Lett.* **53**, 1501–1512.

Rigon, R., Rodriguez-Iturbe, I., Maritan, A., Giacometti, A., Tarboton, D. G. & Rinaldo, A. (1996) On Hack's law. *Water Resour. Res.* **32**, 3367–3374.

Rinaldo, A., Rodriguez-Iturbe, I., Rigon, R., Ijjasz-Vasquez, E. J. & Bras, R. L. (1993) Self-organized fractal river networks. *Phys. Rev. Lett.* **70**, 822–826.

Rodriguez-Iturbe, I. & Rinaldo, A. (1997) *Fractal River Basin: Chance and Self-Organisation.* Cambridge University Press, Cambridge, UK.

Rodriguez-Iturbe, I., Rinaldo, A., Rigon, R., Bras, R. L. & Ijjasz-Vasquez, E. (1992) Energy dissipation, run off production and the three dimensional structure of channel networks. *Water Resour. Res.* **28**, 1095–1103.

Yalin, M. S. & Silva, A. M. F. (1999) Regime channels in cohesionless alluvium. *J. Hydraul. Res.* **37**, 725–742.

Yalin, M. S. & Silva, A. M. F. (2000) Computation of channel regime characteristics on thermodynamics basis. *J. Hydraul. Res.* **38**, 57–64.

Yang, C. T. (1987) Energy dissipation rate approach in river mechanics. In: *Sediment Transport in Gravel-bed Rivers* (ed. by C. R. Thorne, J. C. Bathurst & R. D. John), 735–766. Wiley & Sons Inc., New York, USA.

Yang, C. T. & Song, C. C. S. (1979) Theory of minimum rate of energy dissipation. *J. Hydraul. Div. ASCE* **105**, 769–784.